
EXERCICES 9

1. Montrer que $a, b \in \mathbb{R}$ vérifient toujours

$$||a| - |b|| \leq |a - b|.$$

2. Montrer que les fonctions suivantes ne sont pas continues au point indiqué :

- a) Au point $a = 0$ pour la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1$ pour $x > 0$ et $f(x) = 0$ pour $x \leq 0$.
- b) Au point $a = 0$ pour la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = -1$ pour $x < 0$ et $g(x) = 1$ pour $x > 0$ et $g(0) = 0$.
- c) Au point $a = 0$ pour la fonction $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \sin(1/x)$ pour $x \neq 0$ et $h(0) = 0$.

3. a) Soit une fonction continue f de domaine $]a, b[$. Montrer que si $f(r) = 0$ pour tout r rationnel dans $]a, b[$, alors $f(x) = 0$ pour tout $x \in]a, b[$.

- b) Soit f et g des fonctions continues sur $]a, b[$ tel que $f(r) = g(r)$ pour tout r rationnel dans $]a, b[$. Montrer que $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in]a, b[$.

4. a) Soit f une fonction de domaine \mathbb{R} avec $f(x) = 1$ si x est rationnel et $f(x) = 0$ sinon. Montrer que f est discontinue en tout point $a \in \mathbb{R}$.

- b) Soit g une fonction de domaine \mathbb{R} avec $g(x) = x$ si x est rationnel et $g(x) = 0$ sinon. Montrer que g est discontinue en tout point $a \in \mathbb{R}^*$ mais que g est continue au point $a = 0$.

5. Pour tout nombre rationnel non-nul r , écrivons $r = \frac{p}{q}$ où $q > 0$ et où $|p|$ et q n'ont pas de facteurs communs. On définit une fonction f avec pour domaine \mathbb{R} avec $f(x) = \frac{1}{q}$ si x est rationnel non-nul, $f(0) = 1$ et $f(x) = 0$ sinon. Montrer que f est continue au point x si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et que f n'est pas continue au point x si $x \in \mathbb{Q}$.